

REICE
Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas
Abriendo Camino al Conocimiento
Facultad de Ciencias Económicas, UNAN-Managua

REICE |
199

Vol. 9, No. 18, Julio- Diciembre 2021

REICE ISSN: 2308-782X

<http://revistacienciaseconomicas.unan.edu.ni/index.php/REICE>
revistacienciaseconomicas@gmail.com

Autómatas Celulares en la Economía: Aplicación a la Teoría del Comportamiento del Consumidor.

Cellular Automata in the Economy: Application to the Theory of Consumer Behavior.

Fecha recepción: febrero 10 del 2021
Fecha aceptación: mayo 05 del 2021

Martin Pomares C.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias e Ingeniería. UNAN-Managua

Correo: martinpomares@yahoo.com; stringnoide@gmail.com

ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4994-0573>



Derechos de autor 2021 REICE: Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas. Esta obra está bajo licencia internacional [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/). Copyright (c) Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas de la Unan- Managua

Resumen

La aplicación de autómatas celulares es una técnica de modelamiento de sistemas complejos con amplias utilidades en la economía, especialmente en temas de teoría de juegos. En el presente trabajo se pretende utilizar un modelo de autómata celular vinculado a un modelo probabilístico de Gibbs para el cálculo de entropía del sistema en cuestión como medida de insatisfacción o de satisfacción en la elección debido a preferencias de consumo. Se estudiaron cuatro posibilidades en la evolución del sistema considerando de manera previa la entropía en la evolución del sistema. Los resultados reflejan datos preliminares para considerar mejoras en el modelo el cual puede considerarse como un modelo primario para la aplicación de la Econofísica a estudios de teoría de consumo mediante autómatas celulares de clase 4.

REICE
200

Palabras claves: *Autómata celular, renta, entropía, satisfacción, insatisfacción.*

Abstract

The application of cellular automata is a complex systems modeling technique with wide utility in economics, especially in game theory issues. In the present work, the aim is to use a cellular automaton model linked to a Gibbs probabilistic model to calculate the entropy of the system in question as a measure of dissatisfaction or satisfaction in the choice due to consumption preferences. Four possibilities in the evolution of the system were studied, previously considering the entropy in the evolution of the system. The results reflect preliminary data to consider improvements in the model, which can be considered as a primary model for the application of Econophysics to studies of consumption theory using class 4 cellular automata.

Keywords: Cellular automaton, income, entropy, satisfaction, dissatisfaction

Introducción

Los **autómatas celulares** tienen su origen con Von Neuman (entre 1940-1970) con el propósito de estudiar autómatas o maquinas que puedan auto-reproducirse (Fig. 1), luego con J. H. Conway (entre 1970 y 1983) para estudiar el Juego de la Vida. A partir de 1983 S. Wolfram desarrollo el concepto para estudiar lo que denomino “La Mecánica Estadística de los Autómatas Celulares”. Y es a partir de Wolfram que se han estudiado matemáticamente el concepto de autómatas celulares con múltiples aplicaciones en la ciencia (Pérez, 2012).

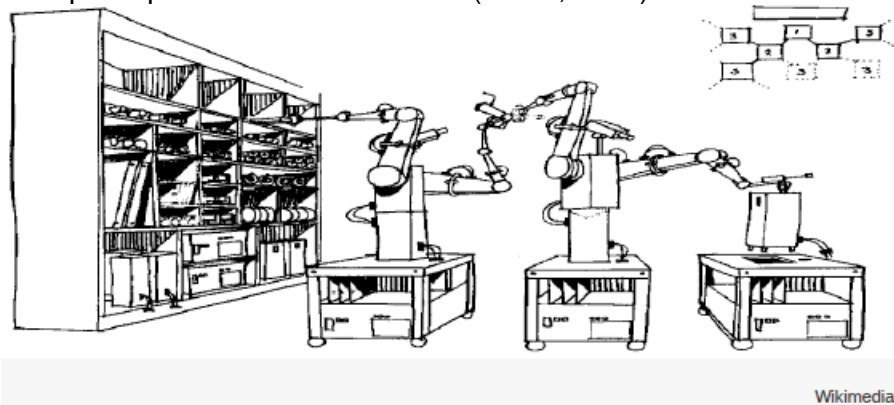


Fig. 1. Esquema fundamental de Von Neuman en la concepción de los autómatas celulares (tomado de Wikimedia).

El fundamento matemático actual para entender a un autómata celular es partiendo de una definición grafica, en el cual el autómata consiste en un conjunto de estados, reglas y vecindades. Los estados pueden ser graficados o representado por celdillas en un diagrama 2D, las cuales si son binarias pueden recibir dos codificaciones de color: blanco y negro. El color blanco representaría un estado binario 1, y el color negro un estado binario 0, o bien viceversa 1 para el negro y 0 para el blanco en dependencia del convenio. La vecindad corresponde al rango de celdas con las cuales cada estado debe interactuar, y las reglas corresponden a la forma matemática como un estado pasa dinámicamente de un estado a otro cercano o lejano dependiendo de cómo se defina esta interacción. En la fig. 2 se representa a un autómata celular simple en donde se consideran solo dos estados los cuales interactúan de acuerdo a la regla 30.

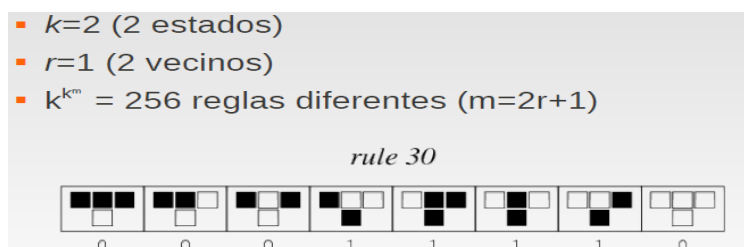


Fig. 2 Esquemización de un autómata celular elemental (Fuente: E. W. Weisstein, Mathworld).

Existen diversas formas de utilidades o aplicaciones de la teoría matemática de los autómatas, dentro de los enfoques más importantes radican: análisis cualitativo por Wolfram (1984) y Li & Packard (1990), análisis cuantitativo por Weunche (1998) utilizando el concepto de entropía de entrada, y Langton (1990) el cual utilizo por parámetro los conocidos exponentes de Lyapunov. Adicionalmente con ayuda de los autómatas se estudia los comportamientos emergentes así como autorregulación, y estructuras jerárquicas y no jerárquicas. En la economía se utiliza más

en el estudio de los sistemas de mercados. En la Fig. 3 se presentan algunos ejemplos de autómatas estudiados.

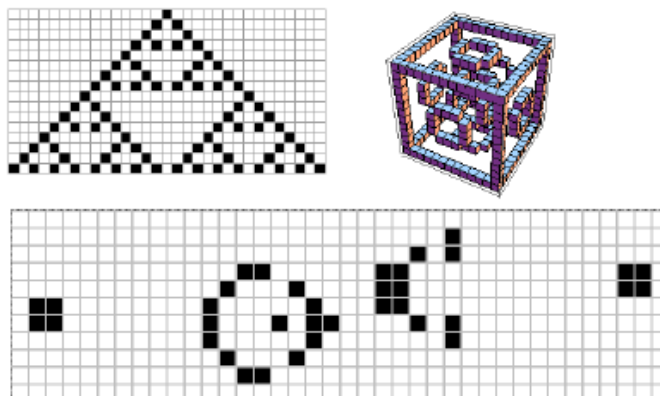


Fig. 3. Regla 90 de Wolfram (arriba izq.), AC en 3 dimensiones (arriba derecha) y Game of life de John Conway (abajo). Fuente: Reyes Gómez, David Alejandro (2011)

Además de lo antes expuesto, los modelos de autómatas celulares corresponden a un gran conjunto de modelos utilizados para el estudio de sistemas complejos, los cuales de acuerdo con Meagher. K. & Rogers, M. (1997), fue en 1989, en Santa Fe, donde un grupo de físicos y economistas discutieron acerca del traslape entre ambas disciplinas, de tal manera que la memoria de la conferencia fue titulada *The Economy as an Evolving Complex System* (La Economía como un Evolucionante Sistema Complejo) el cual contiene artículos acerca del alcance de técnicas que incluyen teoría del caos, redes neurales, y autómatas celulares.

El alcance de la investigación consiste en ampliar la aplicación de los conceptos fisicomatemáticos a la economía lo cual es objeto de estudio de la Econofísica, así como implementar nuevos modelos para entender la dinámica de consumo basada en la teoría de las preferencias. Por lo cual los objetivos primordiales del presente trabajo son: (1) Desarrollar un modelo microeconómico que vincule conceptos de la física a aplicaciones de la economía en modelos de consumo, tal como el concepto de espacio de fases (continua y cuántica) correspondiente al espacio de configuraciones para productos versus bienes, (2) aplicaciones de modelos de la mecánica estadística aplicado a los autómatas celulares para representar una dinámica, la cual representara el comportamiento de consumo en un espacio de configuraciones de productos versus bienes, (3) describir mediante tres diversos escenarios elementales el comportamiento dinámico basado en la teoría de preferencias y modelar esta dinámica gráficamente mediante la teoría de los autómatas celulares.

Modelo Matemático

En economía falta mayor énfasis en el modelamiento de la teoría de preferencias reveladas. El presente estudio considera estudiar la dinámica de la teoría de consumo mediante un grafico de precio (p_i) versus bienes (x_i) el cual en el espacio vectorial cartesiano resultante se representara un estado que correspondería a la renta (w_i) (Ver Fig. 4). Dicha renta sería representada de manera cuantizada por un estado de autómatata en un arreglo 2D. La dinámica de la renta correspondería a la dinámica con la que el autómatata celular cambiaría de estado en un espacio de configuraciones. El área de cada estado correspondería a la renta mínima que un consumidor elige gastar ante un bien. La dinámica de la renta vendría a ser la posible dinámica de preferencia

para elegir un bien ante un precio específico. Partiendo del hecho de que la elección sería óptima, al incrementar la dinámica de la renta incrementará la imposibilidad de tener la adecuada preferencia o satisfacción. Por tal motivo simultáneamente al modelo de los autómatas se simulara una distribución de Gibbs para dicha evolución de autómata mediante el código de *lotería probabilística y distribución de Gibbs con medición de entropía*. En nuestro caso la entropía será una medida de insatisfacción a consecuencia de la dinámica. Para estudiar la dinámica del autómata que representará la renta se escogió el modelo de segregación de Schelling para el cual se modelaran dos agentes o bienes.

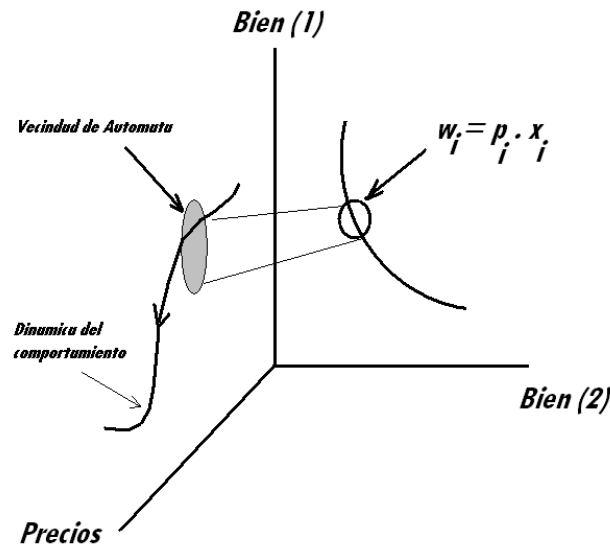


Fig. 4. Esquema de la utilidad de los autómatas. El espacio de configuraciones de Precios versus Bien será de utilidad para entender la dinámica de consumo.

Modelo de Segregación de Schelling

Este modelo de simulación consiste en N agentes que realizan interacciones locales, es decir con sus vecinos más cercanos lo cual le consideraremos como vecindario de radio r . Partiremos de la suposición que los agentes están representados por una celdas 2D (cuadrículas) ubicados sobre una red rectangular, donde cada uno tiene a un vecino para observar, y cada uno cuenta cuantos vecinos de su misma especie hay en su vecindario. Una restricción es que cada agente tiene ocho vecinos para observar. En nuestro caso cada agente representa un bien (B_i), por lo cual por comodidad de análisis simularemos dos agentes distintos. Consideraremos una tolerancia representada por un número positivo $m \in \{1, \dots, 2r + 1\}$, el cual determina el número máximo de vecinos no agradables que el agente es capaz de admitir. La tolerancia puede ser entendida como un (threshold) de insatisfacción que cada agente admite en su vecindario. En nuestro modelo, si los agentes poseen menos vecinos que el parámetro THRESH (threshold), entonces estos se encuentran insatisfechos, y por lo tanto intercambiarán sus posiciones para reiniciar sus observaciones (Benito & Hernández, 2007).

La utilidad individual, la cual mide en forma binaria el nivel de satisfacción individual generado por su vecindad. El conjunto de información de cada agente i , su vecindad de radio r en el estado t denotada por $V^t(i, r)$ es igual a un elemento de $\{0,1\}^{2r+1}$ centrados en i y la utilidad del agente i en el estado t es representado a como sigue (Benito & Hernández, 2007):

$$U^t(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\{j \in V^t(i,r) \text{ tal que } j \neq i\}| \leq m \\ 0 & \text{si } |\{j \in V^t(i,r) \text{ tal que } j \neq i\}| > m \end{cases}$$

La función de utilidad dice que cada individuo le corresponde solamente el número de vecinos tanto que prefiere como los que no prefiere, lo que implica que los agentes les importa más la composición que la configuración. La dinámica es un proceso iterativo, donde los agentes escogen la mejor respuesta dada por el conjunto de la información local (Benito & Hernández, 2007).

Código Schelling en Matlab según Heymann, D. , Perazzo, R. y Zimmermann, M.G. (2011)

A continuación se presenta el código diseñado en Matlab del modelo de Schelling, en el cual la red se define mediante una tirada aleatoria (dada por la variable U), que distribuye los valores de unos y ceros con igual probabilidad. Se establece una función para medir satisfacción: *measures_satisfaction(one, x, y)*. Dicha función cuenta la cantidad de vecinos del mismo color (tipo) de un agente. Cuando ambos agentes tienen una cantidad de vecinos de acuerdo a su preferencia (por debajo del umbral crítico), al azar se establece la permutación de lugares en la red. Este modelo corresponde a un autómata de clase 4.

Código de Schelling

```
function nn = schelling(N0 , thresh )
global U N;
step = 150;
rand('state',0);

N = N0 ;
% t i t l e of main window
titulo = [ 'Schelling Game : N=' , num2str(N*N)];
U = round( rand(N,N) ) ;      % s e t s random f i e l d

% sets main figure
film = imagesc(U, [ 0 1 ] ) ;
axis off ; axis square ; axis on ;
title ( titulo ) ;
xlabel ('x','fontsize' ,16);
ylabel ('y','fontsize' ,16);
axis ( [ 0 N+1 0 N+1 ] ) ;
i =1;
while i <=90000,
    i
    % S e l e c t s one agent
    one = round( rand( 1 , 2 )*(N-1))+1;
    x1 = one ( 1 ) ; y1 = one ( 2 ) ;

    % s e l e c t s second agent and measures s a t i s f a c t i o n
    two = round( rand( 1 , 2 )*(N-1))+1;
    x2 = two ( 1 ) ; y2 = two ( 2 ) ;

    % computes s a t i s f a c t i o n
    if U( x1 , y1 ) ~= U( x2 , y2 )
        sat1 = measures_satisfaction ( one , x1 , y1 ) ;
        sat2 = measures_satisfaction ( two , x2 , y2 ) ;

        if sat1 < thresh & sat2 < thresh
            temp = U( x1 , y1 ) ;
```

```
    U( x1 , y1)=U( x2 , y2 ) ;
    U( x2 , y2)=temp ;
end;
end;
if (mod( i,step )==0)
    set (film,'cdata',U);
    drawnow
end;
i=i +1;
end
```

```
function sat = measures_satisfaction ( one , x1 , y1 )
```

```
global U N;
xl = mod( x1-2,N)+1; % inde x l e f t
xr = mod( x1 ,N)+1; % inde x r i g h t
yb = mod( y1-2,N)+1; % inde x bot tom
yt = mod( y1 ,N)+1; % inde x top

% measures the number of 1 s in neighborhood
neig = U( xl , y1 ) + U( xr , y1 ) + U( xl , yb ) + U( xl , yt ) ;
neig = neig + U( xl , yb ) + U( xl , yt ) + U( xr , yb ) + U( xl , yt ) ;

% d e f i n e s s a t i s f a c t i o n
if U( x1 , y1 ) == 0
    sat = 8-neig ;

else
    sat = neig ;
end;
```

Aplicación de la mecánica estadística al caso de los dos agentes modelados con autómatas celulares

De acuerdo a Dragalescu and Yakovenko, (2000), y con Dragalescu, (2003) se puede desarrollar un abordaje estadístico a un sistema de múltiples agentes (compuesto por N jugadores), cada uno de ellos con una dotación de dinero m_i . La característica del modelo es que los N jugadores están comprometidos en una lotería donde sortearán un par $i; j$ de ellos y luego al azar, se decide quién de ellos 'gana' una cantidad m , y quien 'pierde' una cantidad igual. Si el agente que 'pierde' no pueda afrontar el pago de dm , la jugada queda cancelada. Se desea ahora averiguar cuál es la probabilidad con que se pueden encontrar agentes con una tenencia de dinero m que resulte estacionaria frente ese tipo de transacciones. Dicha probabilidad se estima mediante la distribución de Gibbs utilizada en la mecánica estadística $P(m) = Ae^{-\beta m}$, donde $\beta = 1/T = N/M$ representa a la temperatura que para el caso de un sistema económico es la cantidad de dinero promedio por agente.

Sin embargo, necesitamos conocer la entropía del sistema, es decir la medida de desorden con que se establecen los procesos estadísticos de dicho sistema denominada por $S = \log(M)$.

Código de Juego de Intercambio al Azar y distribución de Gibbs

```
function [m g hx s] = gibbs(m_ini,N,tim_total)

m_step = 1 ;           % money exchanged per interaction
m = m_ini*ones(1,N) ; % initial money for all agents

out_steps = N;
num_bins = 50 ;
hx = 1:num_bins ;
% calc el valor asintotico
g = exp(-hx/m_ini)/sum(exp(-hx/m_ini));
sg = -sum( g.*log(g));

figure(1)
s = [] ;
tim = 0;
while tim < N*tim_total,

    coin = randint(1,2,[1 N]);
    up = coin(1);
    down = coin(2);
    dm = m_step*rand(1,1);

    if m(down)< dm,
        continue
    end
    m(up) = m(up) + dm;
    m(down) = m(down)-dm;

    if mod(tim,out_steps) == 0,
        [tim/N,sum(m)]

        % compute entropy at this step
        h = hist(m,hx);
        p = h/sum(h);
        xx = find(p>0);
        s = [s;tim/N,-sum(p(xx).*log(p(xx))),sg];

        if mod(tim,100*out_steps) == 0,
            drawplot(p,s,h,hx,m_ini);
        end
    end
    tim = tim + 1 ;
end

% normalized prob distribution
h = hist(m,hx);
p = h/sum(h);

g = drawplot(p,s,h,hx,m_ini)

end

function [g,sg] = drawplot(p,s,h,hx,m_ini)

% theoretical function
g = exp(-hx/m_ini)/sum(exp(-hx/m_ini));
```



```
subplot(2,1,1)
plot(hx,p,'r+',hx,g,'b')
%semilogy (xx,h/sum(h),'r+',xx,exp(-xx/m_agent)/sum(-exp(-xx/m_agent)),'b')
xlabel('m'); ylabel('p(m)');
legend('p(x)', 'gibbs');
subplot(2,1,2)
plot(s(:,1),s(:,2),'b',s(:,1),log(length(p)),'r',s(:,1),s(:,3),'g')
xlabel('t'); ylabel ('s');
drawnow;
```

end

Material y Método

El autor propone estudiar la dinámica de la teoría de consumo mediante un gráfico de precio (p_i) versus bienes (x_i) el cual en el espacio vectorial cartesiano resultante se representara por un autómata 2D donde cada estado o celda representa a la renta (w_i) la cual cuya área representa el valor mínimo de la renta por dicho bien. Se utilizará el modelo de segregación de Schelling de autómatas celulares ya que cumple matemáticamente con las características adecuadas para estudiar dinámica de estados, en nuestro caso dos agentes o bienes a ser escogidos. En la medición de insatisfacción, el modelo necesita una estimación estadística de insatisfacción causada por la dinámica misma al tratar de alcanzar la opción más adecuada posible, por lo cual ningún sistema es óptimo o de máxima eficiencia. Esto cumple con las características dinámicas de un sistema de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica, por lo cual siempre tendremos cierto grado de entropía. Para éste caso, se utilizó el modelo de *juego del intercambio al azar bajo una distribución probabilística de Gibbs* como parte del proceso de elección. Por lo tanto se considera dos jugadores ($N = 2$) los que comienzan con la misma dotación $m_{ini} = 2$, luego para cada paso de tiempo se elige al azar un par de agentes, y luego la cantidad intercambiada que va entre 0 y m_{step} . En nuestro caso para tener secuencia con el modelamiento de los autómatas consideraremos 150 pasos.

Para coordinar los estados de los autómatas con la probabilística de Gibbs, el modelo de Schelling se corrió para diversos pasos (*steps*): 57, 70, 91, 135, los cuales corresponden a tiempos en el diagrama de entropía (Fig. 5), y con los parámetros de 7 estados, y un valor de umbral “threshold” de 10. Por esta razón los autómatas serán arreglos de 49 estados bicoloreados.

Resultados y Análisis

En las Fig. 5 y Fig. 6 se presentan los resultados obtenidos de la simulación. La Fig. 5 presenta la evolución de la entropía bajo la selección de los estados de satisfacción e insatisfacción por un bien u otro (los agentes evaluados). Además, de acuerdo a la metodología se presentan los tiempos que corresponderían a los pasos de simulación de los autómatas bajo el modelo de Schelling cuyos resultados son mostrados en la Fig. 6. Dicha figura presenta la evolución de los estados de decisión de preferencias entre dos agentes bajo las condiciones preestablecidas para el modelo.

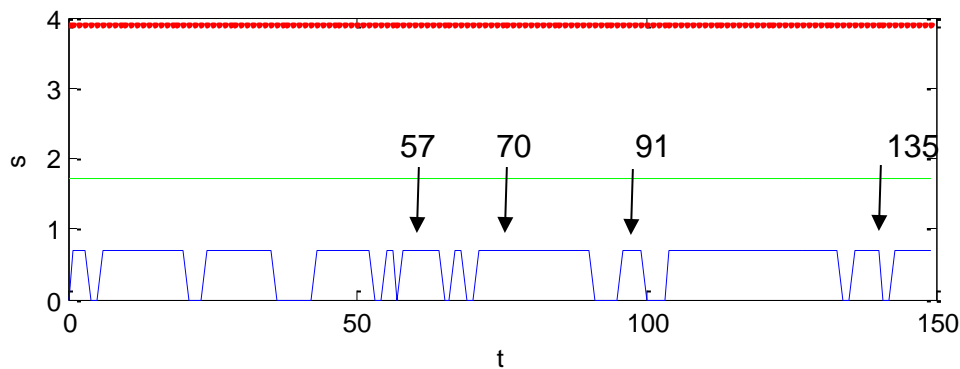


Fig. 5. Diagrama de Entropía (S) versus tiempo de estimación probabilístico.

Los estados válidos o de decisión preferida son presentados en color “rojo”, considerando el estado inicial en la esquina superior izquierda para todos los ítems de la Fig. 6. El color “azul” representa un estado vacío es decir sin valor alguno. Todos los recuadros rojos representan la dinámica seguida por el autómata. Se supone que para los estados presentados en la Fig. 6 se presentan los estados más estables en comparación a los puntos señalados en la Fig. 5 pero en la cual se considera hay mayor satisfacción. En la gráfica de la Fig.5 se puede ver cómo evoluciona la entropía, es decir, entre satisfacción (entropía cero) e insatisfacción (entropía máxima = 0.63 unidades). Por otra parte, la ruta

de las celdas de color rojo indica los lugares de la dinámica de la renta en la cual se consideran óptimas las decisiones del consumidor.

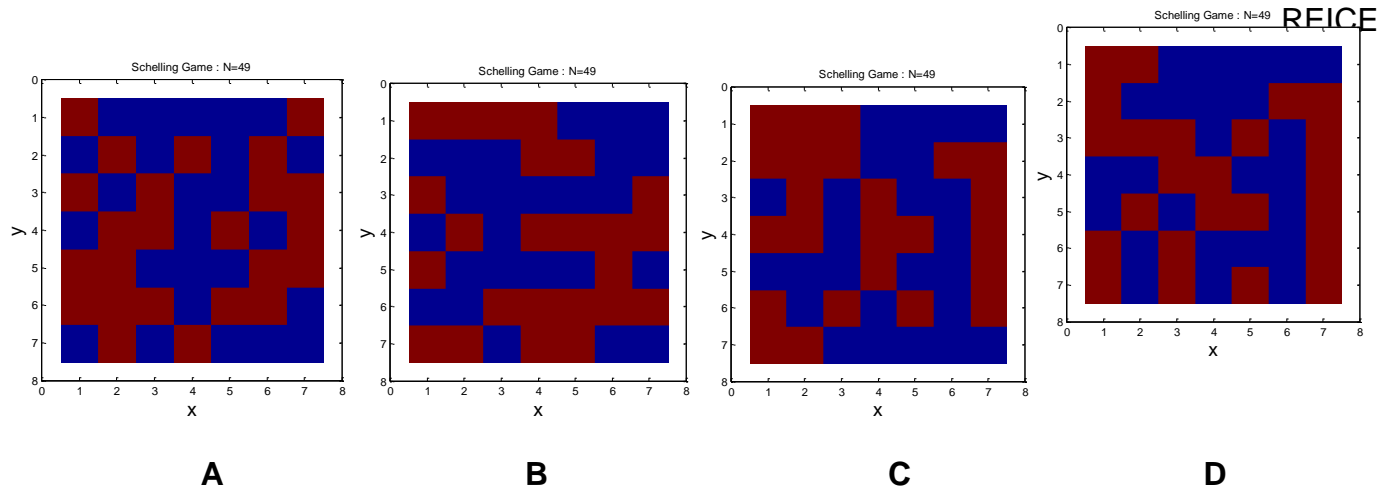


Fig. 6. Evolución de los estados de los autómatas para diversos *steps*: A = 57, B = 70, C = 91, D = 135.

Por otra parte, es indiscutible que el modelo necesita varias mejoras: (i) cálculo simultáneo de entropía en la medida que se corre el modelo de Schelling, (ii) considerar reducir el tamaño de la retícula 2D del diagrama de fases independiente de la selección de datos de entrada, (iii) el establecer por regla de dinámica celular la curva definida de demanda que generalmente se define para un espacio de “bien” versus “bien”. Esto último permitiría hacer que los resultados del modelo sean más dependientes de datos generados por los registros económicos, más similares a modelos usados para modelar dinámica poblacional. La única desventaja de éstos modelos mencionados, es que no son tan adecuados para estudiar una dinámica de decisión a como se muestra en el modelo de segregación de Schelling.

Conclusiones

En el presente modelo se estudió la dinámica de preferencias reveladas en un nuevo espacio de configuraciones de precio versus bien, con el propósito de tener una idea gráfica de la dinámica de cómo evoluciona el estado de satisfacción o bien de insatisfacción. Para tal fin, se consideró la medición entrópica del sistema bajo las consideraciones predefinidas presentando una entropía máxima prácticamente estable. Desde el punto de vista de la microeconomía es necesario profundizar en éste tema especialmente para estudiar una conexión más cercana entre la física y la economía. Para tal fin, es posible considerar que éste es uno de los pocos trabajos de Econofísica en donde se ha estudiado el tema de preferencias reveladas desde el punto de vista de la dinámica de autómatas celulares, lo que hace que el presente estudio se pueda considerar como una primera aproximación. Es claro, que otros modelos pueden emplearse para satisfacción de las ideas iniciales de la presente investigación. Sin embargo, desde el punto de vista de la matemática habrá mucho que emprender en estudios de dinámicas relacionadas a series de tiempo lo cual podría pensarse en futuros trabajos.

Referencias Bibliográficas

Pérez López, Andrés (2012). Autómatas Celulares. Development of a SuerCollider3 Class.

Reyes Gómez, David Alejandro (2011) Descripción y Aplicaciones de los Autómatas Celulares. Departamento de Aplicación de Microcomputadoras. Universidad Autónoma de Puebla (UNAM). México.

Meagher. K. & Rogers, M. (1997) Networks, Spillovers and Models of Economic Growth.

Benito, J.M. And Hernandez, P. (2007) Modelling Segregation through Cellular Automata: A Theoretical Answer. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.

Heymann, D., Perazzo, R. y Zimmermann, M.G. (2011) Modelos económicos de múltiples agentes. Una aproximación de la economía desde los sistemas complejos. WORK IN PROGRESS.

Dragalescu, A. and Yakovenko, V. (2000) Statistical mechanics of money, Eur. Phys. J. B 17, 723-729.

Dragalescu, A. A. (2003) Applications of physics to economics and finance: Money, income, wealth, and the stock market. e-print arXiv:cond-mat/0307341v2.